

Ispit iz Matematike 1, Hemija, 01.02.2012. GRUPA I

- 1.(10 poena) Izračunati $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2(\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 1))$.
- 2.(10 poena) Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$.
- 3.(10 poena) Odrediti domen i prevojne tačke funkcije $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$.
- 4.(10 poena) Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 4y = 8x^2$.
- 5.(10 poena) Izračunati $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}} dx$.
- 6.(10 poena) U kutiji se nalaze tri kuglice označene brojem 1, četiri kuglice označene brojem 2, i dve kuglice označene brojem 3. Na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu iz kutije. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja izvučeni broj.
 - (a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive X .
 - (b) Naći EX i DX .

Ispit iz Matematike 1, Hemija, 01.02.2011. GRUPA II

- 1.(10 poena) Izračunati $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2(\ln(x^2 + 3) - \ln(x^2 + 2))$.
- 2.(10 poena) Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
- 3.(10 poena) Odrediti domen i prevojne tačke funkcije $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$.
- 4.(10 poena) Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.
- 5.(10 poena) Izračunati $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx$.
- 6.(10 poena) U kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem 1, četiri kuglice označene brojem 3, i jedna kuglica označene brojem 5. Na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu iz kutije. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja izvučeni broj.
 - (a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive X .
 - (b) Naći EX i DX .

Rešenje:

1. grupa I

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2(\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 1)) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{3x^2} =$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{-x^2 + 1}{2}} \right)^{\left(-\frac{x^2 + 1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{x^2 + 1}\right) \cdot 3x^2} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{6x^2}{x^2 + 1}} = \ln e^{-6} = -6.$$

1. grupa II

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2(\ln(x^2 + 3) - \ln(x^2 + 2)) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 \ln \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 2} \right)^{3x^2} =$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2 + 2} \right)^{(x^2 + 2) \left(\frac{1}{x^2 + 2} \right) 3x^2} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3x^2}{x^2 + 2}} = \ln e^3 = 3.$$

2. grupa I

Primenom Košijevog kriterijuma dobijamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-2}{n+1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{n+1}{2}} \right)^{n+1} =$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right)^{\left(-\frac{n+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-2}{n+1}\right) \cdot (n+1)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{n+1}\right) \cdot (n+1)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$$

pa red konvergira.

2. grupa II

Primenom Dalamberovog kriterijuma dobijamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n!(n+1)n!(2n)!}{n!n!(2n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} =$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 6n + 2} = \frac{1}{4} < 1, \text{ pa red konvergira.}$$

3. grupa I

Domen: $\frac{x-1}{x-2} > 0$ i $x \neq 2$.

$D : (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$. Nađimo prvi i drugi izvod funkcije.

$$f'(x) = \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-2-x+1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-1)(x-2)}$$

$$f''(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)^2}.$$

$f''(x) = 0$ za $2x - 3 = 0$, $x = \frac{3}{2}$, pa je to potencijalna prevojna tačka. Međutim, ona nije iz domena funkcije i prevojne tačke NEMA.

3. grupa II

Domen: $\frac{x-2}{x-3} > 0$ i $x \neq 3$.

$D : (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$. Nađimo prvi i drugi izvod funkcije.

$$f'(x) = \frac{x-3}{x-2} \cdot \frac{x-3-x+2}{(x-3)^2} = \frac{-1}{(x-2)(x-3)}$$

$$f''(x) = \frac{2x-3}{(x-2)^2(x-3)^2}.$$

$f''(x) = 0$ za $2x - 3 = 0$, $x = \frac{3}{2}$, pa je to potencijalna prevojna tačka. Funkcija $f(x)$ je konkavna na $(-\infty, \frac{3}{2})$ a konveksna na $(\frac{3}{2}, 2) \cup (3, +\infty)$, pa $(\frac{3}{2}, -\ln 3)$ jeste prevojna tačka.

4. grupa I

$$y'' + 4y = 8x^2.$$

Odgovarajuća homogena: $y'' + 4y = 0$ ima karakterističnu jednačinu $\lambda^2 + 4 = 0$ čiji su koreni $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$, pa je $\alpha = 0$, $\beta = 2$.

Opšte rešenje homogene je $y_h = e^{\alpha x} [C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x] = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Ostaje da nađemo jedno partikularno rešenje.

$f(x) = 8x^2 = e^{\alpha x}[P_n \cos \beta x + Q_l \sin \beta x]$, odakle je : $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P_n = 8x^2$ tj. $n = 2$,
 $p = \max\{n, l\} = 2$. Pošto $\alpha + i\beta = 0$ nije koren karakteristične jednačine onda je $m = 0$, pa je,
 najzad, partikularno rešenje oblika

$$y_p = x^m e^{\alpha x}[P_p \cos \beta x + Q_p \sin \beta x] = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y_p' = 2Ax + B, y_p'' = 2A.$$

$$y_p'' + 4y_p = 8x^2$$

$$2A + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = 8x^2$$

$$\text{uz } x^2: 4A = 8, A = 2$$

$$\text{uz } x: 4B = 0, B = 0$$

$$\text{slob.: } 2A + 4C = 0, C = -1$$

$$y_p = 2x^2 - 1$$

$$\text{Rešenje: } y = y_h + y_p = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2x^2 - 1.$$

4. grupa II

$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$. Odgovarajuća homogena: $y'' - 3y' + 2y = 0$ ima karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \text{ čiji su koreni } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

Opšte rešenje homogene je $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Ostaje da nađemo jedno partikularno rešenje.

$$f(x) = e^{2x} = e^{\alpha x}[P_n \cos \beta x + Q_l \sin \beta x], \text{ odakle je : } \alpha = 2, \beta = 0, P_n = 1 \text{ tj. } n = 0,$$

$p = \max\{n, l\} = 0$. Pošto $\alpha + i\beta = 2$ jeste jednostruki koren karakteristične jednačine onda je
 $m = 1$, pa je, najzad, partikularno rešenje oblika

$$y_p = x^m e^{\alpha x}[P_p \cos \beta x + Q_p \sin \beta x] = A x e^{2x}.$$

$$y_p' = A(e^{2x} + 2x e^{2x}), y_p'' = A(2e^{2x} + 2e^{2x} + 4x e^{2x}).$$

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = e^{2x}$$

$$2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 3Ae^{2x} - 6Axe^{2x} + 2Axe^{2x} = e^{2x}$$

$$Ae^{2x} = e^{2x}, \text{ odakle je } A = 1.$$

$$y_p = x e^{2x}$$

$$\text{Rešenje: } y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x e^{2x}.$$

5. grupa I

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}} dx =$$

Uvedimo smenu : $x = t^4$

$$dx = 4t^3 dt$$

$$= \int \frac{4t^2 t^3}{1-t} dt = 4 \int \frac{t^5}{1-t} dt = -4 \int \frac{t^5}{t-1} dt =$$

Podelimmo polinome: $t^5 : (t-1) = \dots = t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$ i ostatak 1.

$$= -4 \int (t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}) dt = -4(\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|) + C, \text{ gde je } t = \sqrt[4]{x}.$$

5. grupa II

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx = \text{Uvedimo smenu : } x = t^3$$

$$dx = 3t^2 dt$$

$$= 3 \int \frac{t t^2}{1-t} dt = -3 \int \frac{t^3}{t-1} dt =$$

Podelimmo polinome: $t^3 : (t-1) = \dots = t^2 + t + 1$ i ostatak 1.

$$= -3 \int (t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}) dt = -3(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|) + C, \text{ gde je } t = \sqrt[3]{x}.$$

6. grupa I

(a) Skup vrednosti koje može da uzima slučajna promenljiva X je $\{1, 2, 3\}$, pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $P\{X = 1\} = \frac{3}{9}, P\{X = 2\} = \frac{4}{9}, P\{X = 3\} = \frac{2}{9}$.

Slučajna promenljiva X ima zakon raspodele

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

(b) $EX = 1 \cdot \frac{3}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{17}{9}$.

Slučajna promenljiva X^2 ima zakon raspodele

$$X^2 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{3}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$DX = E(X)^2 - (EX)^2 = 1 \cdot \frac{3}{9} + 4 \cdot \frac{4}{9} + 9 \cdot \frac{2}{9} - \left(\frac{17}{9}\right)^2 = \frac{44}{81}$$

6. grupa II

(a) Skup vrednosti koje može da uzima slučajna promenljiva X je $\{1, 3, 5\}$, pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $P\{X = 1\} = \frac{2}{7}, P\{X = 3\} = \frac{4}{7}, P\{X = 5\} = \frac{1}{7}$.

Slučajna promenljiva X ima zakon raspodele

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

(b) $EX = 1 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{4}{7} + 5 \cdot \frac{1}{7} = \frac{19}{7}$.

Slučajna promenljiva X^2 ima zakon raspodele

$$X^2 : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 25 \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$DX = E(X)^2 - (EX)^2 = 1 \cdot \frac{2}{7} + 9 \cdot \frac{4}{7} + 25 \cdot \frac{1}{7} - \left(\frac{19}{7}\right)^2 = \frac{80}{49}$$